

## Übungsblatt 4 Kongruenzgruppen

### 13. Indizes von Kongruenzgruppen

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\Gamma_1(N)$  ein Normalteiler von  $\Gamma_0(N)$ , aber nicht von  $\Gamma_1$  ist. Ist  $\Gamma_0(N)$  ein Normalteiler von  $\Gamma_1$  ?
- (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Indizes  $[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)]$ ,  $[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)]$ ,  $[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)]$  und  $[\Gamma_1 : \Gamma_0(N)]$ .  
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildungen  $\Gamma_1(N) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $A \mapsto \bar{A} \bmod N$  und  $\Gamma_0(N) \rightarrow \mathbb{Z}_N$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \bar{d} \bmod N$ , sowie  $[G_1 : G_2][G_2 : G_3] = [G_1 : G_3]$  für diskrete Gruppen  $G_3 \leq G_2 \leq G_1$ .

### 14. Verhältnis von $\Gamma(N)$ zu $\Gamma_0(N^2)$ .

(4 Punkte) Bestimmen Sie einen Isomorphismus von  $\Gamma(N)$  nach einer Untergruppe von  $\Gamma_0(N^2)$  mit Index  $\phi(N)$  in  $\Gamma_0(N^2)$ . Insbesondere sind dann  $\Gamma(2)$  und  $\Gamma_0(4)$  isomorph. Hier ist  $\phi$  die sogenannte Eulerfunktion:  $\phi(N)$  ist gleich der Anzahl von positiven ganzen Zahlen, die kleiner als  $N$  und teilerfremd zu  $N$  sind.

### 15. Fundamentalbereich von Untergruppen.

- (a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei Untergruppen mit endlichem Index in  $\Gamma_1$  sind, und dass  $\Gamma = \alpha\Gamma'\alpha^{-1}$  für ein  $\alpha \in \text{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ . Wenn  $\mathcal{F}'$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma'$  ist, zeigen Sie, dass  $\alpha\mathcal{F}'$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$  ist.
- (b) (2 Punkte) Zeichnen Sie einen Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(4)$  und geben Sie alle Eckpunkte und Randkomponenten explizit an..

### 16. Kongruenzgruppen der Stufe 2.

(4 Punkte) Beschreiben Sie alle Kongruenzgruppen  $\Gamma'$  der Stufe 2, d.h. alle Untergruppen, die zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma(2)$  liegen:  $\Gamma(2) \subset \Gamma' \subset \Gamma_1$ . Finden Sie einen einfach zusammenhängenden Fundamentalbereich für jedes solche  $\Gamma'$ . Nehmen Sie dazu einen passenden Anteil des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}(2)$  von  $\Gamma(2)$ , der in der Vorlesung gegeben wurde.

Abgabetermin: Dienstag, 21. 11. 2017 um 10:00 Uhr.